

PRINCIPALES CASOS DE FACTORIZACIÓN

CASO	Características y cuándo aplicarlo	Cómo realizar la factorización	Ejemplos	
1	Factor Común	<ul style="list-style-type: none"> - Se aplica en binomios, trinomios y polinomios de cuatro términos o más. No aplica para monomios. - Es el primer caso que se debe inspeccionar cuando se trata de factorizar un polinomio. - El factor común es aquello que se encuentra multiplicando en cada uno de los términos. Puede ser un número, una letra, varias letras, un signo negativo, una expresión algebraica (encerrada en paréntesis) o combinaciones de todo lo anterior. 	<ul style="list-style-type: none"> - De los coeficientes de los términos, se extrae el MCD (Máximo Común Divisor) de ellos. - De las letras o expresiones en paréntesis repetidas, se extrae la de menor exponente. - Se escribe el factor común, seguido de un paréntesis donde se anota el polinomio que queda después de que el factor común ha abandonado cada término. 	$3x + 3y = 3(x + y)$ $10a - 15b = 5(2a - 3b)$ $mp + mq - mr = m(p + q - r)$ $-7x^3 + 8x^2 - 4x + 11 = -(7x^3 - 8x^2 + 4x - 11)$ $x(a + 1) - t(a + 1) + 5(a + 1) = (a + 1)(x - t + 5)$ $12c^3d^4f^2 - 18c^2df^2 + 30c^5d^3f^2h = 6c^2df^2(2cd^3 - 3 + 5c^3d^2h)$
2	Factor Común por Agrupación de Términos	<ul style="list-style-type: none"> - Se aplica en polinomios que tienen 4, 6, 8 o más términos (siempre que el número sea par) y donde ya se ha verificado que no hay factor común (caso 1). - Se forman grupos de igual número de términos, buscando que exista alguna familiaridad entre los términos agrupados (es decir, que tengan rasgos comunes). - La agrupación se hace colocando paréntesis. - ¡CUIDADO! Deben cambiarse los signos de los términos encerrados en el paréntesis si éste queda precedido por signo negativo. - Se extrae factor común de cada grupo formado (es decir, aplicamos el caso 1 en cada expresión encerrada en paréntesis). - Por último, se extrae factor común de toda la expresión (es decir, nuevamente se aplica el caso 1; en esta ocasión, el factor común es una expresión encerrada en paréntesis). 	<ul style="list-style-type: none"> - La agrupación se hace colocando paréntesis. - ¡CUIDADO! Deben cambiarse los signos de los términos encerrados en el paréntesis si éste queda precedido por signo negativo. - Se extrae factor común de cada grupo formado (es decir, aplicamos el caso 1 en cada expresión encerrada en paréntesis). - Por último, se extrae factor común de toda la expresión (es decir, nuevamente se aplica el caso 1; en esta ocasión, el factor común es una expresión encerrada en paréntesis). 	<p>Factorizar: $px + mx + py + my$ Nótese que no existe factor común en este polinomio de cuatro términos. Entonces, formamos grupos de dos términos: $= (px + mx) + (py + my)$ Extraemos factor común de cada grupo formado: $= x(p + m) + y(p + m)$ Por último, extraemos factor común de toda la expresión: $= (p + m)(x + y)$</p> <p>Factorizar: $2ac - 5bd - 2a + 2ad + 5b - 5bc$ Nótese que no existe factor común en este polinomio de seis términos. Antes de formar los grupos, es conveniente reubicar los términos (observe que hay tres que tienen coeficiente 2 y otros tres que tienen coeficiente 5...¡Eso es un rasgo común!): $= 2ac - 2a + 2ad - 5bc + 5b - 5bd$ Agrupamos: Los tres primeros términos y los tres últimos: $= (2ac - 2a + 2ad) - (5bc - 5b + 5bd)$ Nótese que los signos del segundo paréntesis cambiaron, ya que éste queda precedido de signo negativo. Ahora, extraemos factor común de cada grupo formado: $= 2a(c - 1 + d) - 5b(c - 1 + d)$ Por último, extraemos factor común de toda la expresión: $= (c - 1 + d)(2a - 5b)$</p>
3	Diferencia de Cuadrados Perfectos	<ul style="list-style-type: none"> - Se aplica solamente en binomios, donde el primer término es positivo y el segundo término es negativo. - Se reconoce porque los coeficientes de los términos son números cuadrados perfectos (es decir números que tienen raíz cuadrada exacta, como 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, etc.) y los exponentes de las letras son cantidades pares (2, 4, 6, 10, 8n, 16b, etc.) 	<ul style="list-style-type: none"> - Se extrae la raíz cuadrada de cada término: Al coeficiente se le extrae la raíz cuadrada normalmente (por ejemplo: $\sqrt{81} = 9$) y a las letras, su exponente se divide entre 2 (por ejemplo: $\sqrt{x^6} = x^3$; $\sqrt{m^8} = m^4$; $\sqrt{p^2} = p$). Esto último se fundamenta en la propiedad de la radicación: $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$. - Se abren dos grupos de paréntesis (conectados entre sí por multiplicación). - Las raíces cuadradas que se obtuvieron de cada término se anotan dentro de cada paréntesis: en el primero van sumando y en el segundo van restando (es decir, se obtiene el producto notable llamado SUMA POR DIFERENCIA). 	<p>Factorizar: $a^2 - b^2$ Extraemos la raíz cuadrada de cada término: $\sqrt{a^2} = a$; $\sqrt{b^2} = b$. Entonces, la factorización queda así: $= (a + b)(a - b)$</p> <p>Factorizar: $49x^4y^2 - 64w^{10}z^{14}$ Extraemos la raíz cuadrada de cada término: $\sqrt{49x^4y^2} = 7x^2y$; $\sqrt{64w^{10}z^{14}} = 8w^5z^7$ Entonces, la factorización queda así: $= (7x^2y + 8w^5z^7)(7x^2y - 8w^5z^7)$</p>
4	Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP)	<ul style="list-style-type: none"> - El trinomio debe estar organizado en forma ascendente o descendente (cualquiera de las dos). - Tanto el primero como el tercer término deben ser positivos. Asimismo, esos dos términos deben ser cuadrados perfectos (es decir, deben tener raíz cuadrada exacta). En otras palabras, el primero y el tercer término deben reunir las características de los términos que conforman una Diferencia de Cuadrados Perfectos (Caso 3). 	<ul style="list-style-type: none"> - Primero debemos verificar que se trata de un Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP). Para ello extraemos la raíz cuadrada tanto del primer como del tercer término. - Realizamos el doble producto de las raíces obtenidas y comparamos con el segundo término (sin fijarnos en el signo de éste). Si efectivamente nos da, entonces tenemos un TCP. - La factorización de un TCP es un binomio al cuadrado, que se construye anotando las raíces cuadradas del primer y tercer término, y entre ellas el signo del segundo término. 	<p>Factorizar: $4x^2 + 12xy^2 + 9y^4$ Como cumple con las condiciones, procedemos a extraer la raíz cuadrada del primer y tercer término: $\sqrt{4x^2} = 2x$; $\sqrt{9y^4} = 3y^2$ Ahora realizamos el doble producto de las raíces obtenidas: $2 \cdot 2x \cdot 3y^2 = 12xy^2$ Nótese que nos dio como resultado el segundo término, luego tenemos un TCP. Su factorización queda así: $= (2x + 3y^2)^2$</p> <p>Factorizar: $25m^4 - 40m^2 + 16$ Como cumple con las condiciones, procedemos a extraer la raíz cuadrada del primer y tercer término: $\sqrt{25m^4} = 5m^2$; $\sqrt{16} = 4$ Ahora realizamos el doble producto de las raíces obtenidas: $2 \cdot 5m^2 \cdot 4 = 40m^2$ Nótese que nos dio como resultado el segundo término (sin considerar su signo). Quiere decir esto que tenemos un TCP. Su factorización queda así: $= (5m^2 - 4)^2$</p>

PRINCIPALES CASOS DE FACTORIZACIÓN

CASO	Características y cuándo aplicarlo	Cómo realizar la factorización	Ejemplos
5	<p>Trinomio de la forma $x^{2n}+bx^n+c$</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Se abren dos grupos de paréntesis. - Se le extrae la raíz cuadrada al primer término y se anota al comienzo de cada paréntesis. - Se definen los signos: el signo del primer paréntesis se obtiene al multiplicar los signos del primer y segundo término; el signo del segundo paréntesis se obtiene al multiplicar los signos del segundo y tercer término. - Buscamos dos cantidades que multiplicadas den como resultado el término independiente (es decir c), y que sumadas den como resultado el coeficiente del segundo término (es decir b). - Se anotan las cantidades que satisfacen las condiciones anteriores en los espacios en blanco de cada paréntesis, en sus lugares respectivos. 	<p>Factorizar: $x^2 - 2x - 15$</p> <p>Abrimos dos grupos de paréntesis: $= (\quad)(\quad)$</p> <p>Extraemos la raíz cuadrada del primer término ($\sqrt{x^2} = x$) y la anotamos al comienzo de cada paréntesis: $= (x \quad)(x \quad)$</p> <p>Definimos los signos en cada paréntesis: $= (x - \quad)(x + \quad)$</p> <p>Se buscan dos cantidades que multiplicadas den -15 y que sumadas den -2. Se trata de -5 y 3. Entonces, anotamos esos números en los espacios en blanco y queda lista la factorización: $= (x - 5)(x + 3)$</p> <p>Factorizar: $x^4 + 11x^2 + 28$</p> <p>Abrimos dos grupos de paréntesis: $= (\quad)(\quad)$</p> <p>Extraemos la raíz cuadrada del primer término ($\sqrt{x^4} = x^2$) y la anotamos al comienzo de cada paréntesis: $= (x^2 \quad)(x^2 \quad)$</p> <p>Definimos los signos en cada paréntesis: $= (x^2 + \quad)(x^2 + \quad)$</p> <p>Se buscan dos cantidades que multiplicadas den 28 y que sumadas den 11. Se trata de 7 y 4. Entonces, anotamos esos números en los espacios en blanco y queda lista la factorización: $= (x^2 + 7)(x^2 + 4)$</p>
6	<p>Trinomio de la forma $ax^{2n}+bx^n+c$</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Debemos multiplicar y dividir el trinomio por el coeficiente principal, es decir, a. - En el numerador efectuamos la propiedad distributiva teniendo presente que en el segundo término el producto no se realiza sino que se deja expresado: la cantidad que entra y la variable quedan agrupadas dentro de un paréntesis y el coeficiente original queda por fuera. - Se expresa el primer término como el cuadrado de lo que quedó en paréntesis en el segundo término. - Aplicamos caso 5 (Trinomio de la forma $x^{2n}+bx^n+c$) en el numerador. - Aplicamos caso 1 (Factor común) en los paréntesis formados. - Finalmente, simplificamos la fracción (para eliminar el denominador). 	<p>Factorizar: $6x^2 + 5x - 4$</p> <p>Multiplicamos y dividimos el trinomio por 6, que es el coeficiente principal:</p> $= \frac{6 \cdot (6x^2 + 5x - 4)}{6}$ <p>En el numerador, distribuimos el 6 cuidando de dejar el producto indicado en el segundo término (el 6 se adhiere a la variable x y quedan dentro de un paréntesis). Observe que el coeficiente original del segundo término (es decir 5) queda por fuera: $= \frac{36x^2 + 5(6x) - 24}{6}$</p> <p>Expresamos el primer término como el cuadrado de lo que quedó en paréntesis en el segundo término: $= \frac{(6x)^2 + 5(6x) - 24}{6}$</p> <p>Aplicamos el caso 5 (Trinomio de la forma $x^{2n}+bx^n+c$) en el numerador: Abrimos dos grupos de paréntesis, repartimos $6x$ en cada uno de ellos, cuadramos los signos y buscamos dos cantidades que multiplicadas nos den -24 y que sumadas nos den 5. Se trata de 8 y -3. Entonces la factorización en el numerador queda así: $= \frac{(6x+8)(6x-3)}{6}$</p> <p>Ahora aplicamos caso 1 (Factor común) en los paréntesis formados:</p> $= \frac{2(3x+4)3(2x-1)}{6}$ <p>Por último simplificamos el 2 y el 3 del numerador con el 6 del denominador, y de esta manera llegamos a la factorización del trinomio propuesto:</p> $= (3x + 4)(2x - 1)$
7	<p>Suma y Diferencia de Cubos Perfectos</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Se extrae la raíz cúbica de cada término: Al coeficiente se le extrae la raíz cúbica normalmente (por ejemplo: $\sqrt[3]{8} = 2$) y a las letras, su exponente se divide entre 3 (por ejemplo: $\sqrt[3]{x^6} = x^2$; $\sqrt[3]{y^9} = y^3$; $\sqrt[3]{w^3} = w$). Esto se justifica por la propiedad de la radicación: $\sqrt[m]{a^m} = a^{m/n}$. - Se abren dos grupos de paréntesis (conectados entre sí por multiplicación). - En el primer paréntesis (llamado FACTOR CORTO) se construye un binomio con las raíces cúbicas que ya se obtuvieron. En el segundo paréntesis (llamado FACTOR LARGO) se construye un trinomio con los términos que se anotaron en el factor corto, en el siguiente orden: el primero al cuadrado, luego el primero por el segundo y, por último el segundo al cuadrado. - Por último definimos los signos, de la siguiente manera: Si se trata de una suma de cubos, en el factor corto va signo positivo y en el factor largo van signos intercalados iniciando con positivo. Si tenemos una diferencia de cubos, en el factor corto va signo negativo y en el factor largo van signos positivos. - Los siguientes son los modelos que resumen lo anterior: <p style="text-align: center;">Suma de Cubos: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$</p> <p style="text-align: center;">Diferencia de Cubos: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$</p> <p>IMPORTANTE: En algunas ocasiones el factor corto puede volverse a factorizar (debe revisarse). El factor largo no es necesario inspeccionarlo ya que no permite ser factorizado.</p>	<p>Factorizar: $27x^3 + 125y^9$</p> <p>Como puede observarse, es un binomio que reúne las características de una suma de cubos perfectos. Entonces, extraemos la raíz cúbica de cada término:</p> $\sqrt[3]{27x^3} = 3x ; \sqrt[3]{125y^9} = 5y^3$ <p>Ahora procedemos a armar el factor corto y el factor largo, siguiendo las instrucciones que se dieron:</p> $= (3x + 5y^3)[(3x)^2 - (3x)(5y^3) + (5y^3)^2]$ <p>Desarrollamos las operaciones pendientes en el factor largo:</p> $= (3x + 5y^3)(9x^2 - 15xy^3 + 25y^6)$ <p>Factorizar: $64p^{15} - 343t^6$</p> <p>Como puede observarse, es un binomio que reúne las características de una diferencia de cubos perfectos. Entonces, extraemos la raíz cúbica de cada término: $\sqrt[3]{64p^{15}} = 4p^5$; $\sqrt[3]{343t^6} = 7t^2$.</p> <p>Ahora procedemos a armar el factor corto y el factor largo, siguiendo las instrucciones que se dieron:</p> $= (4p^5 - 7t^2)[(4p^5)^2 + (4p^5)(7t^2) + (7t^2)^2]$ <p>Desarrollamos las operaciones pendientes en el factor largo:</p> $= (4p^5 - 7t^2)(16p^{10} + 28p^5t^2 + 49t^4)$

RECOMENDACIONES GENERALES PARA FACTORIZAR POLINOMIOS

- Siempre inicie revisando si el polinomio tiene factor común (caso 1). Si efectivamente lo hay, extráigalo y revise si se puede factorizar lo que queda dentro del paréntesis.
- Si usted tiene un binomio, ensaye con los casos 3 y 7 (revise las características).
- Si usted tiene un trinomio, ensaye los casos 4, 5 y 6 (revise las características).
- Si usted tiene un polinomio de cuatro, seis o más términos (número par), ensaye el caso 2.
- Siempre que realice una factorización inspeccione los factores obtenidos para ver si pueden ser factorizados nuevamente.